

PROPAGACION DE ONDAS EN SISTEMAS DE BARRAS

ALARCON, E.; GOMEZ LERA, Ma S.

DEPARTAMENTO DE MECANICA ESTRUCTURAL Y CONSTRUCCIONES INDUSTRIALES.  
E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.P.M.

RESUMEN

El objetivo de este artículo consiste en el estudio de la respuesta de sistemas elásticos formados por barras ante cargas aplicadas bruscamente o fuerzas variables en el tiempo por el método de las ondas características. El método exige unas determinadas relaciones entre las propiedades geométricas y las características del material que permite garantizar la periodicidad del movimiento y seguir, en los casos de ondas de corte y longitudinales, la forma del impulso sin distorsionarlo.

INTRODUCCION

La acción de una fuerza aplicada bruscamente a un sistema no se transmite simultáneamente a todas las zonas del mismo; en el instante inicial las zonas alejadas de la de aplicación de la carga no se alteran, propagándose las deformaciones a través del sólido en forma de ondas elásticas.

Si las dimensiones del sistema son grandes, el tiempo que las ondas tardan en atravesarlo es lo suficientemente grande como para ser considerados a efectos prácticos.

REFLEXION Y TRANSMISION DE ONDAS

Sea  $k$  un nudo de una estructura en el que inciden  $n$  barras y sea  $P_1$  y  $P_2$  el sistema de solicitaciones exteriores aplicado en el citado nudo en las direcciones  $X$  e  $Y$  en un instante  $t$  cualquiera de tiempo; se supondrá, además, la existencia en el citado nudo de una masa  $m$  y amortiguadores de coeficientes  $c_1$ ,  $c_2$ .

ABSTRACT

The main goal of this paper is the presentation of a method to study the response of framed elastic systems using the characteristic wave method. The material and geometrical properties of the structure have to maintain certain relations in order to guarantee the periodicity of the solution.

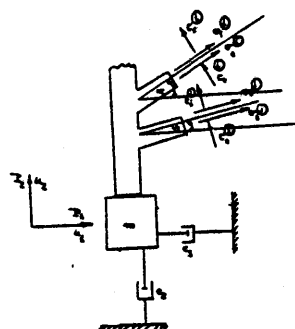


FIGURA 1

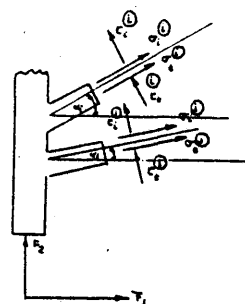


FIGURA 2

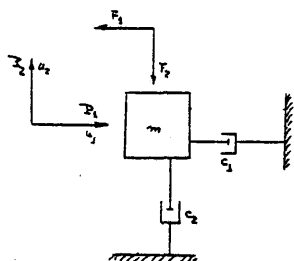


FIGURA 3

si se designa por:

$\sigma_i^j, \tau_i^j \equiv$  Tensiones normales y tangenciales incidentes en el nudo k por la barra j.

$\sigma_t^j, \tau_t^j \equiv$  Tensiones normales y tangenciales transmitidas por la barra j incidente en el nudo k.

$\alpha_j \equiv$  Angulo que la barra j forma con la dirección positiva del eje X.

$A_j \equiv$  Area de la sección transversal de la barra j.

$A_j^* \equiv$  Area efectiva a cortante de la barra j.

### EQUILIBRIO

Observando la figura 3:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

o bien:

$$m^k \ddot{u}^k + c^k \dot{u}^k = p^k - F^k \quad (2)$$

por otra parte el equilibrio de fuerzas en la figura 2 proporciona:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} A_j \cos \alpha_j & -A_j^* \sin \alpha_j \\ A_j \sin \alpha_j & A_j^* \cos \alpha_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_i^j \\ \tau_i^j \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} A_j \cos \alpha_j & -A_j^* \sin \alpha_j \\ A_j \sin \alpha_j & A_j^* \cos \alpha_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_t^j \\ \tau_t^j \end{bmatrix} = 0 \quad (3)$$

si se designa por:

$$R_j^j = \begin{bmatrix} A_j \cos \alpha_j & -A_j^* \sin \alpha_j \\ A_j \sin \alpha_j & A_j^* \cos \alpha_j \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\sigma_i^j = \begin{bmatrix} \sigma_i^j \\ \tau_i^j \end{bmatrix}; \quad \sigma_t^j = \begin{bmatrix} \sigma_t^j \\ \tau_t^j \end{bmatrix}$$

la expresión (3) puede escribirse:

$$F^k + \sum_{j=1}^n R_j^j \cdot \sigma_i^j + \sum_{j=1}^n R_j^j \sigma_t^j = 0 \quad (5)$$

despejando  $F$  de la ecuación anterior y sustituyendo su valor en (2) se obtiene:

$$m^k \ddot{u}^k + c^k \dot{u}^k = p^k + \sum_{j=1}^n R_j^j \sigma_i^j + \sum_{j=1}^n R_j^j \sigma_t^j \quad (6)$$

Si  $\dot{u}_1, \dot{u}_2$  representan los componentes de la velocidad del nudo k, en estudio, en las direcciones horizontal y vertical respectivamente, a la vista de la figura 4.

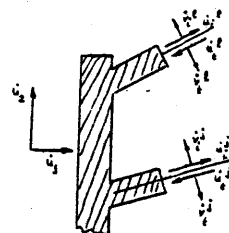


FIGURA 4

La relación de COMPATIBILIDAD se establecería con la siguiente expresión:

$$\begin{vmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha_j & -\sin \alpha_j \\ \sin \alpha_j & \cos \alpha_j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{u}_i^j \\ \dot{v}_i^j \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cos \alpha_j & -\sin \alpha_j \\ \sin \alpha_j & \cos \alpha_j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{u}_t^j \\ \dot{v}_t^j \end{vmatrix} \quad (7)$$

por otra parte la LEY DE COMPATIBILIDAD proporciona:

$$\dot{u}_i^j = \frac{\sigma_i^j}{\rho_j C_p^j} \quad \dot{u}_t^j = \frac{\sigma_t^j}{\rho_j C_p^j} \quad (8)$$

$$\dot{v}_i^j = \frac{\sigma_i^j}{\rho_j C_s^j} \quad \dot{v}_t^j = \frac{\sigma_t^j}{\rho_j C_s^j}$$

sustituyendo las relaciones (8) en (7) se obtiene:

$$\begin{vmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\cos \alpha_j}{\rho_j C_p^j} & \frac{-\sin \alpha_j}{\rho_j C_s^j} \\ \frac{\sin \alpha_j}{\rho_j C_p^j} & \frac{\cos \alpha_j}{\rho_j C_s^j} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_i^j \\ \tau_i^j \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cos \alpha_j & -\sin \alpha_j \\ \sin \alpha_j & \cos \alpha_j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_t^j \\ \tau_t^j \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} \frac{\cos \alpha_j}{\rho_j C_p^j} & \frac{-\sin \alpha_j}{\rho_j C_s^j} \\ \frac{\sin \alpha_j}{\rho_j C_p^j} & \frac{\cos \alpha_j}{\rho_j C_s^j} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_t^j \\ \tau_t^j \end{vmatrix}$$

o bien:

$$\dot{u}^k = T^j \sigma_i^j - T^j \sigma_t^j \quad (9)$$

siendo:

$$T^j = \begin{vmatrix} \frac{\cos \alpha_j}{\rho_j C_p^j} & \frac{-\sin \alpha_j}{\rho_j C_s^j} \\ \frac{\sin \alpha_j}{\rho_j C_p^j} & \frac{\cos \alpha_j}{\rho_j C_s^j} \end{vmatrix}$$

$$\dot{u}^k = \begin{vmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{vmatrix}$$

de la expresión (9) pueden obtenerse las tensiones transmitidas en función de los incidentes y de la velocidad del nudo, es decir:

$$\sigma_t^j = \sigma_i^j - \left| T^j \right|^{-1} \dot{u}^k \quad (10)$$

sustituyendo ahora la expresión (10) en (6) se obtiene, haciendo:

$$\begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} m^k \\ \ddot{v}^k \end{vmatrix} + \left[ \begin{vmatrix} c^k \\ \ddot{v}^k \end{vmatrix} + \sum_{j=1}^n R^j \left[ T^j \right]^{-1} \right] \begin{vmatrix} \dot{v}^k \\ \ddot{v}^k \end{vmatrix} =$$

$$= P^k + 2 \sum_{j=1}^n R^j \sigma_i^j \quad (11)$$

o bien, si:

$$B^k = \sum_{j=1}^n R^j \left[ T^j \right]^{-1} \quad (12)$$

entonces (11) puede escribirse:

$$\begin{vmatrix} m^k \\ \ddot{v}^k \end{vmatrix} + \left[ \begin{vmatrix} c^k \\ \ddot{v}^k \end{vmatrix} + B^k \right] \begin{vmatrix} \dot{v}^k \\ \ddot{v}^k \end{vmatrix} =$$

$$= P^k + 2 \sum_{j=1}^n R^j \cdot \sigma_i^j \quad (13)$$

Precisando, para el instante t:

$$\begin{vmatrix} m^k \\ \ddot{v}_t^k \end{vmatrix} + \left[ \begin{vmatrix} c^k \\ \ddot{v}_t^k \end{vmatrix} + B^k \right] \begin{vmatrix} \dot{v}_t^k \\ \ddot{v}_t^k \end{vmatrix} =$$

$$= P_t^k + \left[ 2 \sum_{j=1}^n R^j \cdot \sigma_i^j \right]_t \quad (14)$$

pero

$$\dot{v}_t^k = \frac{1}{\theta} \left[ v_t^k - v_{t-1}^k \right] \quad (15)$$

por lo que (14) toma la forma:

$$m_{\sim}^k \frac{1}{\theta} \left[ v_t^k - v_{t-1}^k \right] + \left[ c_{\sim}^k + B_{\sim}^k \right] v_t^k = \quad (16)$$

$$= p_{\sim}^k + \left[ 2 \sum_{j=1}^n R_j^j \sigma_i^j \right]_t$$

designando por  $E_{\sim}^k$

$$E_{\sim}^k = p_{\sim}^k + \left[ 2 \sum_{j=1}^n R_j^j \sigma_i^j \right]_t$$

se tiene, al multiplicar por  $\theta$  (INTERVALO DE TIEMPO BASICO):

$$m_{\sim}^k v_t^k - m_{\sim}^k v_{t-1}^k + \theta \left[ c_{\sim}^k + B_{\sim}^k \right] v_t^k =$$

$$= \theta E_{\sim}^k$$

y reagrupando:

$$\left[ m_{\sim}^k + \theta c_{\sim}^k + \theta B_{\sim}^k \right] v_t^k = \theta E_{\sim}^k + m_{\sim}^k v_{t-1}^k$$

por lo que:

$$v_t^k = \left[ m_{\sim}^k + \theta c_{\sim}^k + \theta B_{\sim}^k \right]^{-1} \left[ \theta E_{\sim}^k + m_{\sim}^k v_{t-1}^k \right]$$

ecuación que proporciona la VELOCIDAD EN UN NUDO k, EN UN INSTANTE t, EN FUNCION DE LAS TENSIONES INCIDENTES EN LAS BARRAS QUE CONCURREN EN EL NUDO k.

El procedimiento práctico de análisis se resume a continuación y precisa determinar inicialmente lo que se denomina INTERVALO DE TIEMPO BASICO  $\theta$ .

El mecanismo de transmisión de las ondas en el sistema se estudia en incrementos de tiempo múltiplos enteros del intervalo de tiempo básico.

Si por  $L_i$  se designa la longitud de una barra cualquiera del sistema y por  $C_p$  y  $C_s$ , la celeridad de las ondas P y S, lo largo de la barra i, se tendrá que:

$$t_p^i = \frac{L_i}{C_p^i} ; \quad t_c^i = \frac{L_i}{C_s^i}$$

siendo  $\theta = m.c.d(t_p^1, t_c^1, t_p^2, t_c^2, \dots, t_p^i, t_c^i)$

$$i = 1, \dots, n$$

donde n es el nº de barras que componen el sistema.

#### RESUMEN PROCEDIMIENTO PRACTICO

En un instante t, conocidas las tensiones incidentes de las barras que concurren en un nudo k, es posible:

1º. CALCULAR, LA VELOCIDAD DEL NUDO k.

$$v_t^k = \left[ m_{\sim}^k + \theta c_{\sim}^k + \theta B_{\sim}^k \right]^{-1} \left[ \theta E_{\sim}^k + m_{\sim}^k v_{t-1}^k \right]$$

2º. CALCULAR LA TENSION TRANSMITIDA POR UNA BARRA CUALQUIERA j.

$$\sigma_{t,t}^j = \sigma_{i,t}^j - [T^j]^{-1} v_t^k$$

siendo

$$E_{\sim}^k = p_{\sim}^k + \left[ 2 \sum_{j=1}^n R_j^j \sigma_i^j \right]_t$$

$$B_{\sim}^k = \sum_{j=1}^n R_j^j [T^j]^{-1}$$

$$m_{\sim}^k = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} ; \quad c_{\sim}^k = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$R_{\sim}^j = \begin{bmatrix} A_j \cos \alpha_j & -A_j^* \sin \alpha_j \\ A_j \sin \alpha_j & A_j^* \cos \alpha_j \end{bmatrix}$$

$$T_{\sim}^j = \begin{bmatrix} \frac{\cos \alpha_j}{\rho_j C_p^j} & \frac{-\sin \alpha_j}{\rho_j C_s^j} \\ \frac{\sin \alpha_j}{\rho_j C_p^j} & \frac{\cos \alpha_j}{\rho_j C_s^j} \end{bmatrix}$$

## VERIFICACION DEL ESTUDIO

Se presentan a continuación algunos de los resultados obtenidos mediante un programa de ordenador realizado en base al planteamiento anterior y disponible en un MICROVAX II.

Los dos primeros ejemplos tienen por objeto comprobar las el mecanismo de propagación de las ondas y estudiar el efecto de la introducción de una masa y un amortiguador en un nudo. Para ello se ha utilizado una viga en voladizo en cuyo extremo libre se aplica un impulso rectangular en la dirección longitudinal (Figura 5).

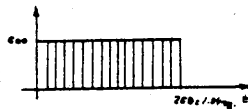
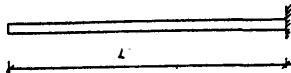


FIGURA 5

### EJEMPLO 1



DATOS:

$$\begin{array}{l|l} L = 100 & E = 30625 \times 10^3 \\ & A = 20 \\ & \rho = 490 \\ & G = 13611.11 \times 10^3 \end{array}$$

$$C_p = \sqrt{E/\rho} = 250$$

$$C_s = \sqrt{G/\rho} = 166.67$$

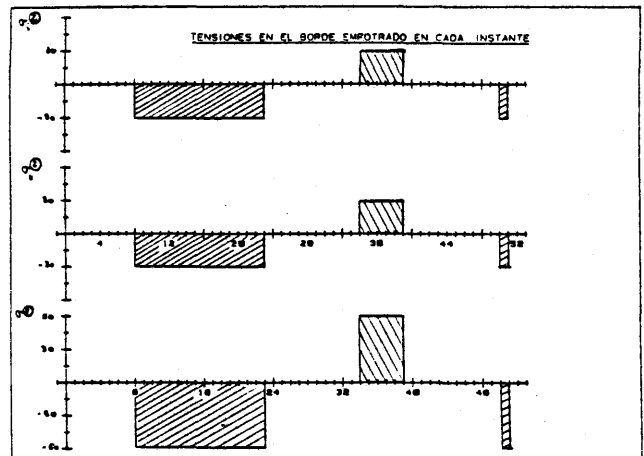
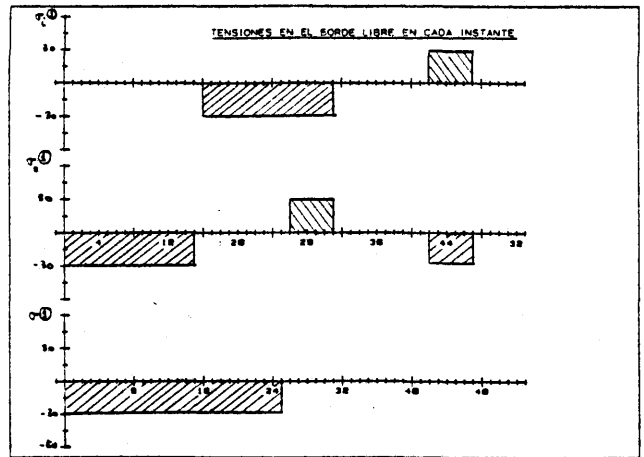
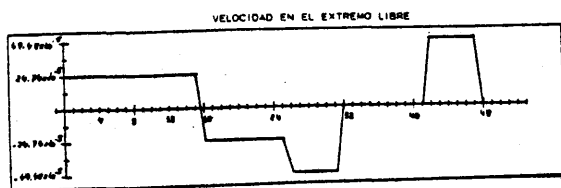
$$t_p = \frac{L}{C_p} = 0.4 = 8 \times 0.05 \quad \text{MODELO:}$$

$$t_s = \frac{L}{C_s} = 0.6 = 12 \times 0.05$$

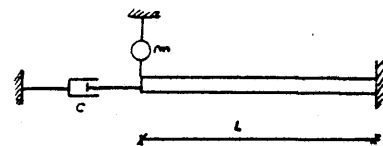
$$\theta = 0.05$$

$$mcp = 8$$

$$mcs = 12$$



### EJEMPLO 2



DATOS:

$$L = 90 \quad E = 30625 \times 10^3$$

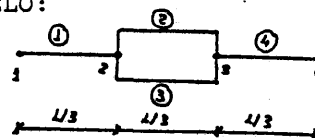
$$A = 20$$

$$\rho = 940 \quad G = 11025 \times 10^3$$

$$C_p = \sqrt{E/\rho} = 250$$

$$C_s = \sqrt{G/\rho} = 150$$

MODELO:



$$m_1 = 300.000$$

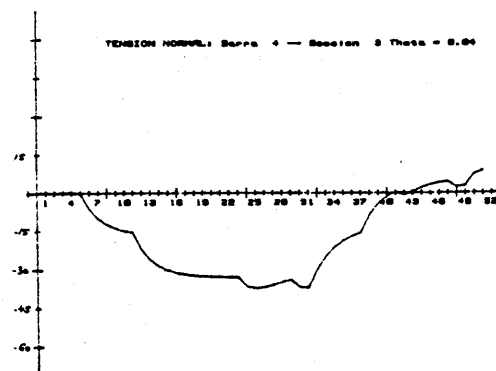
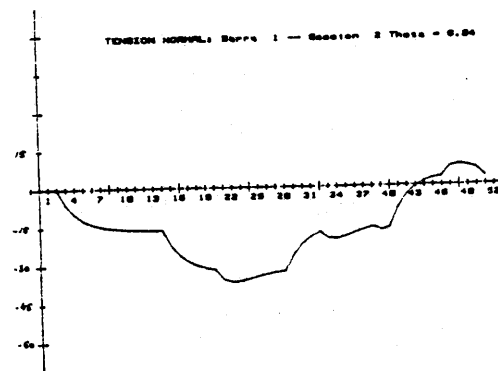
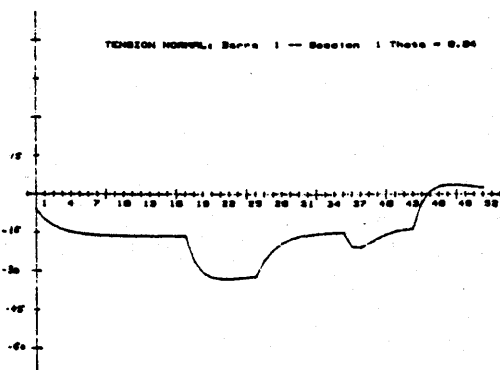
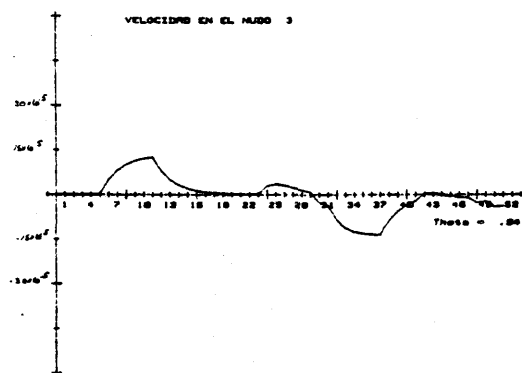
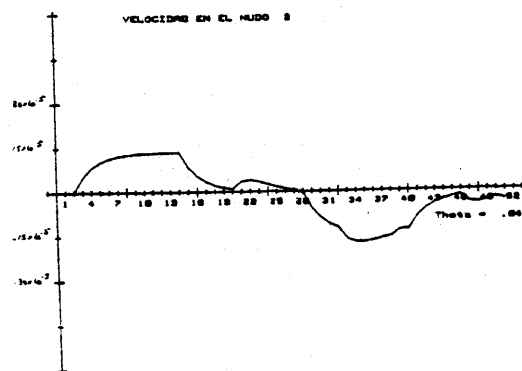
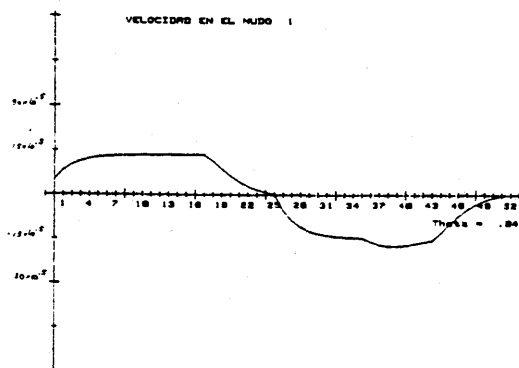
$$C_{1H} = 2 \times 10^6$$

$$t_p = \frac{L/3}{C_p} = 3 \times 0.04 ; t_s = \frac{L/3}{C_s} = 5 \times 0.04$$

$$\theta = 0.04 \text{ seg.}$$

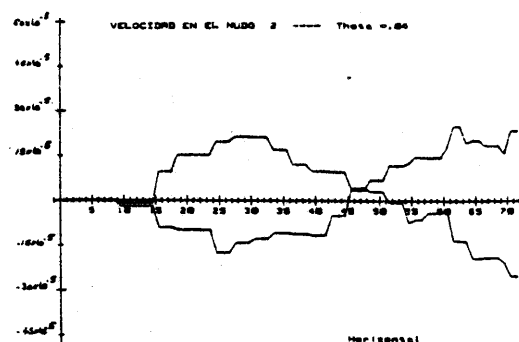
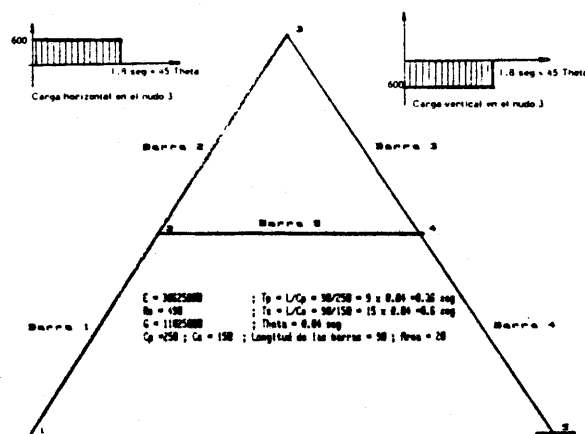
$$mcp = 3 ; mcs = 5$$

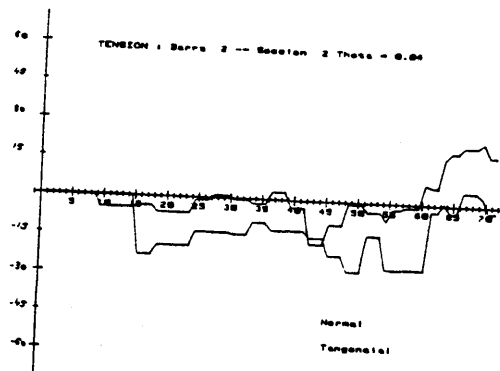
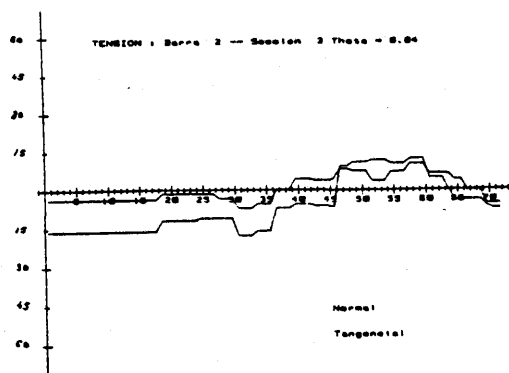
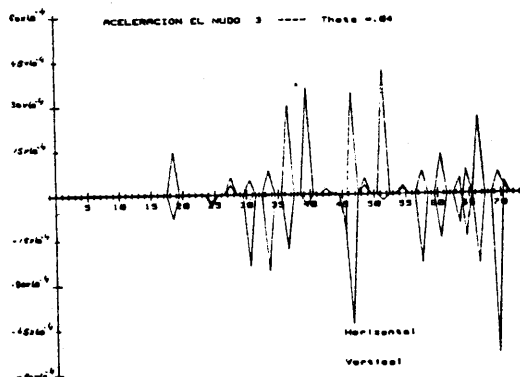
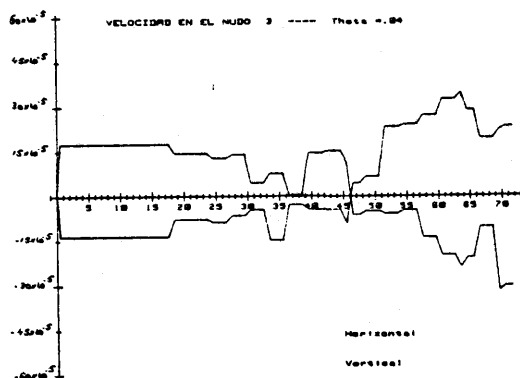
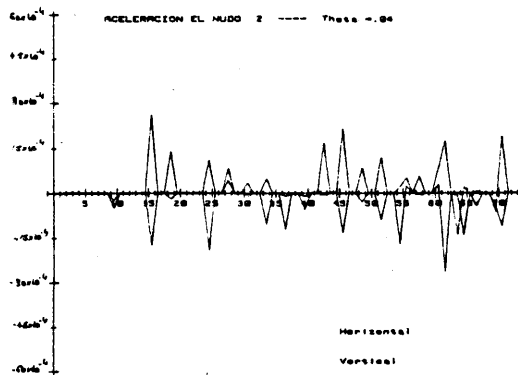
$$A_1 = A_4 = 20 ; A_2 = A_3 = 10$$



### EJEMPLO 3

Se pretende con este ejemplo estudiar el efecto de las barras inclinadas.





## REFERENCIAS

1. M. Zak: "Dynamical response to pulse excitations in large space structures (1987) . AIAA 87-0710.
2. A.H. von Flotow: "A travelling wave approach to the dynamic analysis of large space structures". (1983) AIAA. 83-0964.
3. B.M. Butcher, C.H. Karnes: "Strain-rate effects in metals". Jour. Appl. Phys. 37,1. (1966).
4. L.M. Barker, C.D. Lundergan, W. Herrmann: "Dynamic response of Aluminium" Jour. Appl. Phys. 35.4. (1964).
5. M.P. White, L.V. Griffis: "The propagation of plasticity in uniaxial compression". J. Appl. Mech. ASME. Sept. (1948).
6. D.S. Wood: "On longitudinal plane waves of elastic-plastic strain in solids". J. Appl. Mech. ASME. Dec. (1952).
7. L.N. Persen: "Rock dynamics and geophysical exploration". Elsevier. (1975).
8. S.T.S. Al-Hassani; W. Johnson; M. Nasim: "Fracture of triangular plates due to contact explosive pressure". Jour. Mech. Eng. Science. 14. nº 3. (1972).